**Chapitre 3 – Endomorphismes autoadjoints**

Dans tout le chapitre est un espace euclidien (donc préhilbertien réel de dimension finie) de dimension

1. **Matrices orthogonales**

Par caractérisation équivalente de l’inverse d’une matrice dans on a

Propriété : Soit . On a équivalence entre

1. A est inversible et

Définition : On dit qu’une matrice est orthogonale si

Exemple : et sont orthogonales.

Théorème : L’ensemble des matrices orthogonales de est un sous-groupe de , cad

1. et

Propriété : Soit de colonnes et de lignes . On a équivalence entre

1. est une famille orthogonale
2. La famille est une famille orthonormée de
3. La famille est une famille orthonormée de

Exemple :

La matrice est orthogonale car si on note ses colonnes, on a , et

Remarque :

Comme et qu’une famille orthonormée est libre, on a aussi :

est une base orthonormée de

est une base orthonormée de

Théorème : Soit une base orthonormée de et une famille d’éléments de . On a équivalence entre :

1. est une base orthonormée de
2. est une matrice orthogonale

Dans ce cas, représente la matrice de passage de la base orthonormée à et

Remarque :

Soient et deux bases orthonormées de , notons , alors

où

Définition : Soient . On dit que et sont orthogonalement semblables si ,

Propriété : Soient On a équivalence entre :

1. et sont orthogonalement semblables
2. et représentent le même endomorphisme de l’espace euclidien dans 2 bases orthonormées
3. **Adjoint d’un endomorphisme**

Puisque , l’espace vectoriel des formes linéaires sur est de dimension

Donc il existe un isomorphisme entre et .

Théorème de représentation de Riesz :

Pour tout , notons

Alors l’application

est un isomorphisme d’espace vectoriel. En particulier,

tel que , ie tel que

**Définition de l’adjoint**

Définition : Soit . Il existe un unique endomorphisme tel que :

Remarque : par symétrique de , on peut inverser les places de et .  
Exemple :

1. L’adjoint de est

Car

1. De même,
2. On munit de son p.s. usuel. Déterminons l’adjoint de défini par :

Soient et

Alors où

Comme ,

Donc

Donc par définition/unicité de l’adjoint,

Propriété : Soient et une base orthonormée de . Notons

Alors

Démonstration : ⍟

Notons

Soit , la colonne de , correspond au vecteur colonne des coordonnées de dans la base .

Or puisque est une base orthonormée de , Ainsi pour , correspond à la cordonnée du vecteur selon le vecteur , càd

Donc est la coordonnée du vecteur selon le vecteur

Donc , où

Donc

Attention : Si n’est pas orthonormée, le résultat est FAUX.

Remarque : Comme dans une base orthonormée, , on a :

**Propriétés de l’adjoint**

Propriété : Soient et . On a :

1. Si est bijectif, l’est aussi et

La démonstration se fait en utilisant les propriétés des matrices dans une certaine base .

Propriété : Soit

Démonstration : ⍟

Soit .

Donc

En appliquant ceci à on a

ie

Donc car

Propriété : Soit soit un sev de stable par , alors est stable par .

Démonstration : ⍟

Soit montrons que

Soit

Ainsi , d’où

**Endomorphismes autoadjoints**

Définition :

On dit qu’un endomorphisme est autoadjoint (ou symétrique) si

Propriété : Soit et une base orthonormée de . On a équivalence entre

1. est autoadjoint
2. La matrice de dans la base est symétrique

Corollaire : L’ensemble des endomorphismes autoadjoints de est un sev de de dimension

Propriété :

Soit un projecteur. On a équivalence entre :

1. est un projecteur orthogonal
2. est autoadjoint

Démo en TD

**Théorème spectral**

Lemme : Soit une matrice symétrique réelle. Alors le polynôme caractéristique de est scindé sur . Autrement dit, les valeurs propres de (*a priori* complexes) sont toutes réelles.

Corollaire : Tout endomorphisme autoadjoint d’un espace euclidien non nul admet au moins une valeur propre réelle.

Lemme : Soit autoadjoint, les sous-espaces propres de sont 2 à 2 orthogonaux.

Démonstration : ⍟

Soient avec .

Montrons que et sont orthogonaux.

Soient et

Alors et

Ainsi

Mais comme ,

D’où

Donc

Ainsi

Lemme : Soient autoadjoint et un sev de stable par . Alors est stable par et l’endomorphisme (resp. ) est un endomorphisme autoadjoint de (resp. ).

**Théorème spectral :**

Soit . On a équivalence entre :

1. est autoadjoint ()
2. est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de
3. est diagonalisable dans une base orthonormée de , ie une b.o.n de telle que

Version matricielle :

Soit . On a équivalence entre :

1. (ie est symétrique réelle)
2. est orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle, ie

Exemple : la matrice est diagonalisable dans car et

Ainsi . De même, donc elle est diagonalisable dans

Attention : Le résultat est faux pour les matrices symétriques complexes :

Prenons par exemple

Ainsi

Donc .

Or donc n’est pas diagonalisable (dans )

**Endomorphismes symétriques positifs et définis positifs**

Soit autoadjoint (ie )

Considérons l’application

* On voit directement que est linéaire à droite (mais j’ai un peu la flemme de l’écrire)
* Soient

Donc est symétrique.

Ainsi est bilinéaire symétrique.

* Pour savoir si définit un produit scalaire sur , il reste à savoir si est définie positive, ie :

Définition : Soit autoadjoint.

On dit que est positif si .

On dit que est défini positif si :

* est positif

Ce qui équivaut à :

On note (resp. ) l’ensemble des endomorphismes symétriques positifs (resp. définis positifs) de .

Remarque : on peut remplacer par , car est euclidien.

Exemples :

* Soit , alors

Si de plus, on rajoute l’hypothèse que est bijective, on a :

Donc .

Propriété :

Soit autoadjoint. On a équivalence entre :

1. est positif (ie )

De même, on a équivalence entre :

1. est défini positif (ie )

Démonstration : ⍟ (cas défini positif)

 : Supposons que . Soit (alors )

Et

Alors (car )

Or car , d’où

Ainsi

 : Supposons que . Comme est autoadjoint, par le théorème spectral, il existe une base orthonormée de telle que , avec .

Alors

Soit alors tq avec les non tous nuls, ie

tq

Donc

Or est orthonormée, donc

Ainsi

Donc

Définition : Soit une matrice symétrique réelle. On dit que est positive si

On dit que est définie positive si :

* est positive

Ce qui équivaut à :

On note (resp. ) l’ensemble des matrices réelles de taille symétriques positives (resp. définies positives).

Remarque : Un endomorphisme est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée de est symétrique.

Propriété : Soit . On a équivalence entre :

1. (resp. )
2. (resp. )

Exemple : Soit un sev de ave ,

Notons la projection orthogonale sur et la symétrie orthogonale par rapport à .

Comme , si l’on concatène une b.o.n de avec une b.o.n de , on obtient une base orthonormée de adaptée à .

Et

Alors , donc .  
De même,

Donc , mais , donc

Propriété : Soit , alors il existe un unique endomorphisme tel que .

Corollaire : Soit alors tel que